

梁の共振及び反共振における損失係数について

——等価電気回路モデルによる理論的検討——*

鈴木英男*¹ 城戸健一*¹ 小野隆彦*²

(1999年8月18日受付)

【要旨】 材料の損失係数は片持梁や両端自由梁を用いて測定され、その手法は日本工業規格で規定されている。規格では共振周波数を用いることが規定されているが、実際にはインピーダンス応答が最大となる反共振の特性を用いて測定する場合もある。この論文は、梁の共振におけるパラメータと反共振におけるパラメータがどのような関係にあるかを、梁の振動を表現する等価電気回路モデルを用いて検討するものである。駆動点インピーダンス特性をインダクタンス、キャパシタンス及び抵抗の直列回路が並列に並んだ回路モデルで表し、共振での損失係数と反共振での損失係数の関連を明らかにする。もし、上記のモデルが実際の梁の反共振における振動も正しく表現すると仮定すると、共振と反共振での損失係数は一般に異なる値となることが知られる。また、アドミタンスを測定する際の加振と応答点の位置を変えたときに測定される損失係数への影響についても述べる。

キーワード 損失係数, 減衰比, 梁, 共振, 反共振

Loss factor, Damping coefficient, Beam, Resonance, Anti-resonance

1. はじめに

片持梁や両端自由梁を用いた材料の共振周波数や損失係数(減衰比)の測定は材料の性質を知るための最も重要な評価方法の一つである。試料の寸法と共振周波数から弾性率(ヤング率)が、共振の鋭さから損失係数が求められる。この場合に通常用いられる方法は、力に対する速度応答を測定して(又は加速度応答から速度に変換して)、それぞれの共振についてピークの周波数(f_0)と3dB減衰する周波数(f_1, f_2)から、 $\eta = (f_2 - f_1) / (f_0)$ により損失係数を求めることが行われる(半値幅法)¹⁾。ところが、モービリティ(速度/力、以下、等価電気回路による表現が中心となるのでアドミタンスと呼ぶ)のピーク(共振)を利用する代わりに、機械インピーダンス(力/速度、以下単にインピーダンスと呼ぶ)のピーク(反共振)を用いて同じく半値幅法で損失係数を求めることが実際には行われる。この場合に、損失係数が仮に周波数に依

存しないような材料だとしても、共振と反共振から得られる損失係数が同じ値になるかという疑問が残る。

一方、損失がない場合の連続体の振動理論から、駆動点のインピーダンスは質量とばね定数からなる直列共振系の並列接続としてモデル化できることが知られている²⁾。更に、理論や実験モード解析の分野では、損失を考慮するために各共振に粘性抵抗を直列に挿入する、いわゆるモード減衰の考え方を一般的に用いる³⁾。本論文では、このモデル化が正しいと仮定したときに、二つの隣接する共振における諸定数からその間に発生する反共振の周波数と損失係数の簡易推定方法について述べる。また、共振での損失係数と反共振での損失係数との関係や、駆動点と応答点を変えて損失係数を求めるときの問題点についても検討する。

2. 梁の駆動点インピーダンスの電気回路による表現

梁のある点を駆動したときの駆動点インピーダンスや伝達インピーダンスは解析的に求められ、図-1に示すようにインダクタンス(質量 m に対応)とキャパシタンス(ばね定数 k の逆数に対応)の直列接続の共振系を並列接続した形で表現できることが知られている²⁾。ただし、ここでは粘性抵抗(c)が各共振の質量及びばね定数に対して直列に入るものと仮定して併せて示している。現在のモード解析手法における損失の扱いは基本的にこの考え方(モード減衰)に

* On the relation between the loss factors measured at resonance and anti-resonance frequencies—Theoretical analysis by use of an equivalent electrical circuit model—

by Hideo Suzuki, Ken'iti Kido and Takahiko Ono.

*¹ オンテックアールアンドデー(株)

*² (株)小野測器

(問合先: 鈴木英男 226-8507 横浜市緑区白山 1-16-1

(株)小野測器技術開発本部)

基づいている。

文献2)によれば、各共振の等価質量 m_n と等価ばね定数 k_n は次式で与えられる。

$$m_n(x_0) = (\rho S l) \frac{1}{Y_n^2(x_0)} = \frac{k_n(x_0)}{\omega_n^2} \quad (1)$$

ここで、 x_0 は長さで正規化した駆動点の位置 (0~1)、 ρ 、 S 、 l はそれぞれ梁の密度、断面積、及び長さである。 $Y_n(x)$ は正規化固有関数 (基準関数) であり、片持梁の場合は

$$Y_n(x) = (\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x) - \frac{\cos \alpha_n + \cosh \alpha_n}{\sin \alpha_n + \sinh \alpha_n} (\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x) \quad (2)$$

両端自由の場合は

$$Y_n(x) = (\cos \alpha_n x + \cosh \alpha_n x) + \frac{\sin \alpha_n + \sinh \alpha_n}{\cos \alpha_n - \cosh \alpha_n} (\sin \alpha_n x + \sinh \alpha_n x) \quad (3)$$

で与えられる⁴⁾。この基準関数は直交性を有しており、2乗して0から1まで積分したときの大きさが1となるように正規化している。 α_n は片持梁、両端自由梁についてそれぞれ

$$\cos(a)\cosh(a) = -1 \quad (4)$$

及び

$$\cos(a)\cosh(a) = 1 \quad (5)$$

を満足する離散的な値であり、固有角周波数 ω_n との

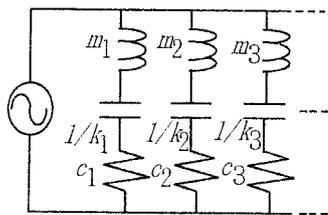


図-1 連続系の等価電気回路モデル

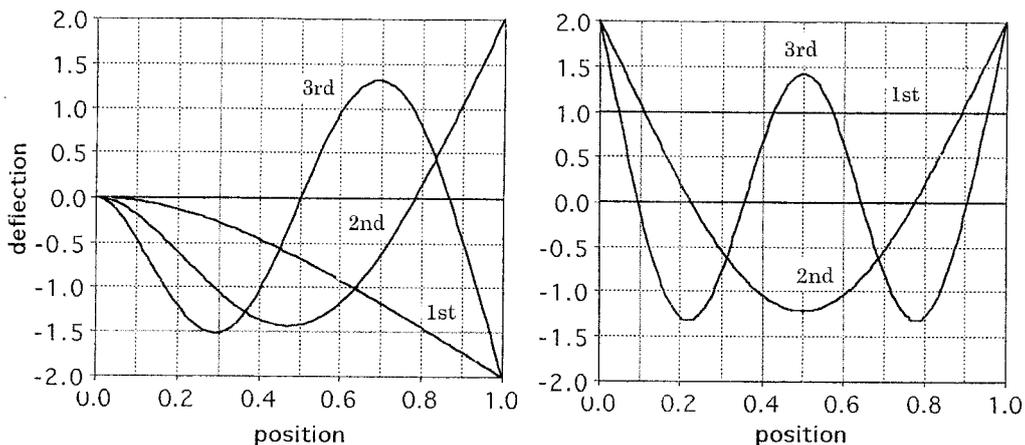


図-2 片持梁 (左) 及び両端自由梁 (右) の振動モード

関係は

$$\omega_n = \frac{\alpha_n^2}{l^2} R \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6)$$

で与えられる (以下、特に断わらない限り、「角周波数」を単に「周波数」として区別せずと呼ぶ)。ここで、 R は回転半径、 E はヤング率、 ρ は密度である。

(1)式が示すように、各共振の等価質量及び等価ばね定数は固有関数の駆動点における大きさの2乗に反比例する。また、等価質量は共振周波数に依存せず、等価ばね定数は共振周波数の2乗に比例する。

ここで、片持梁については先端で駆動するものとし、すべての材料定数や形状を1と仮定して単純化すると、等価質量、等価ばね定数、及び共振周波数 (f_n) は次のように求められる (5次モードまでを示す)。

$$m_n = 0.25 \text{ (kg)} \\ k_n = 3.09056, 121.381, 961.657, 3,654.26, 9,986.05 \text{ (N/m)} \quad (7)$$

$$f_n = 0.5596, 3.5069, 9.8195, 19.242, 31.809 \text{ (Hz)}$$

両端自由梁については中央で加振するものとし、長さは片持梁の2倍とし、その他の定数と同じにして等価質量、等価ばね定数及び共振周波数を求めると次のようになる。

$$m_n = 2.0, 1.3534, 0.9886, 1.0000, 1.0000 \text{ (kg)} \\ k_n = 0.0, 42.341, 903.14, 5,573.5, 19,262.0 \text{ (N/m)} \quad (8)$$

$$f_n = 0.0, 0.8902, 4.8106, 11.879, 22.089 \text{ (Hz)}$$

ここで、両端自由梁の長さを2倍にした理由は、その反共振周波数が片持梁の対応するモードの共振周波数と同じになるように意図したものである。また、(8)式では剛体モードを0次モード (共振周波数はゼロ) として4次の共振モードまでを示す。

なお、どのようなヤング率と密度を持つ材料でも長

さや厚みを調整して、上記の共振周波数を持つような試料を作ることができることを考えると、すべての材料定数や形状を1と仮定しても、理論的な検討を行う上では問題ないことが分かる。

3. 梁の振動モード

(2)及び(3)式で与えられる基準関数を3次モードまで示したものが図-2 (左:片持梁, 右:両端自由梁)である。先端は常に2の大きさを有している。両端自由の場合は中央部の大きさが次数により異なり、次数が高くなると1.414に近づく。損失係数測定で強制加振を行う位置 (片持梁の先端, 両端自由の中央)での基準関数の値の正負は次数が一つ増すごとに反転する。

4. アドミタンス特性

図-3 (左:片持梁, 右:両端自由梁)は図-1の等価電気回路の5次成分 (両端自由梁では4次成分)までと、2次成分までを考慮したときの、駆動点の周波

数応答関数 (アドミタンス) を計算した結果である (前者を実線, 後者を点線で示す)。なお, すべての共振系の損失係数を0.1とした。損失係数が0.1程度であれば, 片持梁, 両端自由梁ともに, 2次までの回路でもその帯域での共振や反共振の特性は良く表されている。片持梁の1次共振周波数 (0.5596 Hz) と, 両端自由のアドミタンス特性から求めた最初の反共振周波数 (0.5591 Hz) は十分な精度で一致している。同様なことが, それぞれの2次の共振と反共振についても言える。結論として, 損失がさほど大きくない場合には, 両端自由の反共振周波数は1/2の長さを持つ片持梁の対応する共振周波数と一致する, と言える。

5. 反共振における振動姿態

図-4(左)は片持梁について, 損失係数が0.1の場合に, 5次成分 (両端自由梁では4次成分)まで考慮した等価電気回路から反共振周波数を求め, その周波数 (2.451 Hz) と前後二つの周波数 (2.206 Hz 及び 2.697 Hz) での先端加振での強制加振の振動姿態

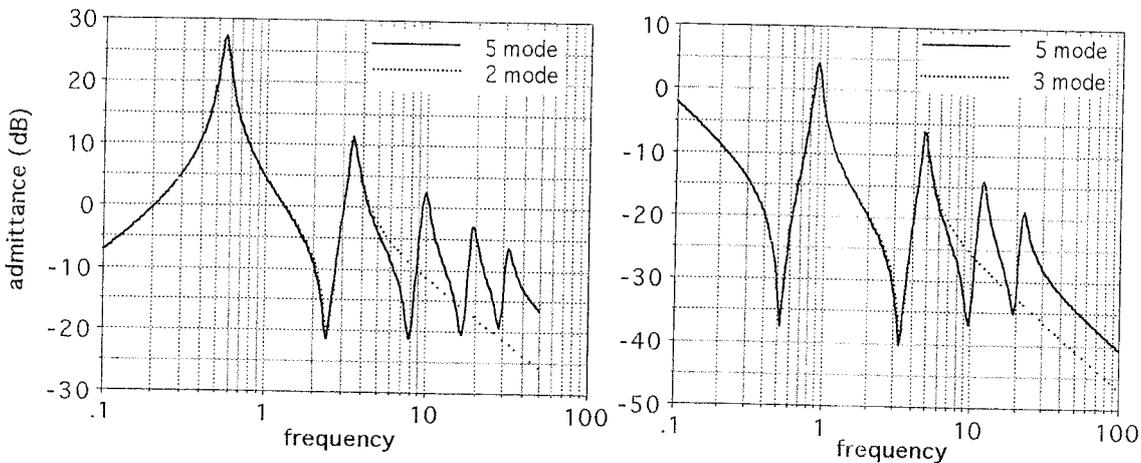


図-3 片持梁 (左) 及び両端自由梁 (右) のアドミタンス特性

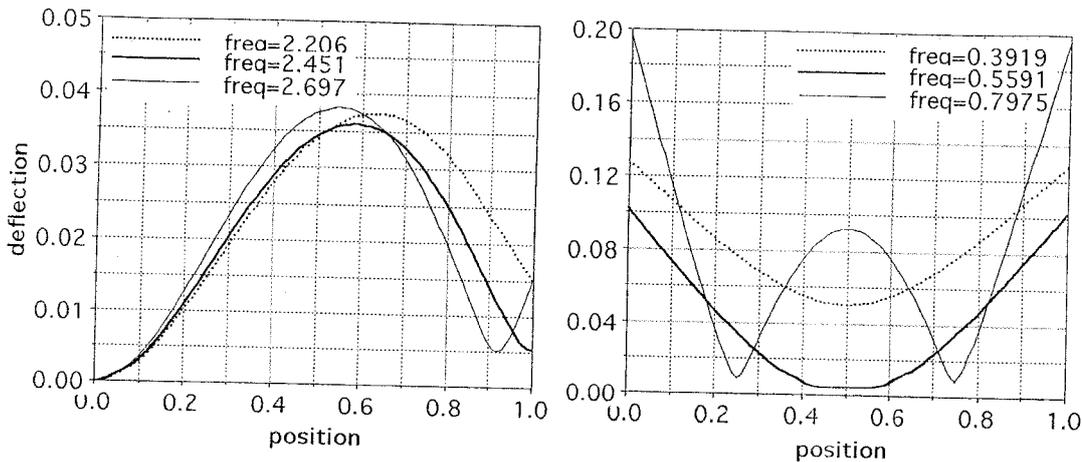


図-4 反共振周波数とその前後での強制加振時の振動姿態 (左:片持梁, 右:両端自由梁)

の
を
ぞ
異
片
定
こ
の
法
実
を

子
が
共
振
の
姿
や

(変位の絶対値)を示したものである。反共振周波数で駆動点での振幅は、損失があるので振動は完全にゼロになることはないが、先端が小さな値となっている。

同様に、図-4(右)に両端自由梁について損失係数が0.1の場合に、反共振周波数(0.5591 Hz)とその前後の周波数(0.3919 Hz及び0.7975 Hz)での強制加振時の振動姿態を示す。片持梁(先端加振)の共振では支持部は常にゼロの変位を持つが、両端自由梁(中央加振)の場合の反共振では損失が完全にゼロでない限り加振部の振幅がゼロとはならないので、両端自由梁の片側だけを見ても、二つの振動姿態が完全に一致することはない。

6. 共振モデルの諸定数から反共振周波数及び反共振周波数での損失係数を推定する方法

隣接する共振の間の反共振について検討するため、図-1の並列回路のうち、該当する二つの共振系からなる等価回路を考える(便利さのため、それらを1次及び2次共振と呼ぶことにする)。まず、隣接する共振の間の周波数では、1次の共振系は質量性(虚数部が正)、2次の共振はばね性(虚数部が負)となるので、それぞれの共振系の虚数部が等しくなる周波数として、反共振周波数 ω_{12} を推定するものとする。

$$\omega_{12}m_1 - k_1/\omega_{12} = k_2/\omega_{12} - \omega_{12}m_2 \quad (9)$$

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}} \quad (10)$$

(10)式で与えられる共振周波数がどの程度真値に近いかを、片持梁について二つの共振の損失係数を変えて検討を行った。(7)式の定数に適用すると2.511 Hzとなる。一方、真値と見なす反共振周波数は、図-1で5次までの共振を考慮した回路のインピーダンスを数値的に計算して、それが最大となる周波数として求めた。それらは、2.457 Hz ($\eta=0.05$), 2.451 Hz ($\eta=0.1$), 2.436 Hz ($\eta=0.2$)となる。(10)式による推定値との差は、損失係数が0.2の場合でも3%程度しかないことを考えると、隣接する共振の間にある反共振周波数を推測する上で(10)式はかなりよい推定値を与えることが分かる。片持梁の場合、 $m_1 = m_2$ という関係を用いて

$$2\omega_{12}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad (11)$$

という関係が得られる。

損失係数に関しては、図-1の並列回路のうち、二つの共振系が作るループの全質量、全ばね定数、全粘性抵抗から

$$\eta = \frac{(c_1 + c_2)}{\sqrt{(m_1 + m_2)(k_1 + k_2)}} \quad (12)$$

で損失係数を求めるものとする。この仮定は、(10)式がループの全質量と全ばね定数の比で反共振周波数が決まることを示しており、全粘性抵抗もそれらに直列に入ることにより損失係数が決められる、との考えに基づいている。

片持梁で二つの共振(1次及び2次)の損失係数とともに0.1として反共振での損失係数を(12)式で求めると、0.081となる。一方、図-2で5次までの共振回路の損失係数をすべて0.1として最初の反共振での損失係数を半値幅法で求めると0.079となる。これは極めて近い値であり、(12)式は精度の高い予測値を与えることを示している。二つの共振での損失係数とともに0.1としているにも係わらず、反共振の損失係数が低下する理由は、2次共振の諸定数が1次共振の諸定数に対して比例関係にない(質量は一定で、ばね定数だけが增大する)ことである。隣接する二つの共振の損失係数が同じであればその間にある反共振での損失係数は共振のそれよりも必ず小さな値になる。両端自由梁の場合でも同様のことが言える。

以上の結果から、図-1のモデルが正しいものとする、共振での損失係数と反共振での損失係数は一般的に異なるものである、と言える。要するに、共振で求めた損失係数と反共振で求めた損失係数は区別して扱う必要がある、ということになる。

7. 二つの隣接する共振とその間の反共振での損失係数の関係

共振系の損失係数も含めてモデルの諸定数が決まれば、横軸を周波数(対数)、縦軸を損失係数(対数)としてグラフ表示したときに、反共振での損失係数(η_{12})が η_1 と η_2 を結ぶ直線上にあるかどうかの判定ができる。図-5(左)は片持梁の1次及び2次共振での損失係数を0.05及び0.31(=0.05×周波数比)としたときの反共振での損失係数を(12)式で推定した結果と併せて示したグラフである。三つの損失係数が直線上に乗っている。図-5(右)は両端自由梁について、2次共振(最初の共振)での損失係数を0.05とし、3次の共振を3段階で変えたときの損失係数を反共振でのそれを含めて示したグラフである。損失係数の比が共振周波数の比(=5.4)に等しい場合に三つの損失係数がほぼ直線上にある。片持梁でも両端自由梁でも $\eta_2 = \eta_1 \times (\omega_2/\omega_1)$ の関係にあるときに三つの損失係数が直線上にある。

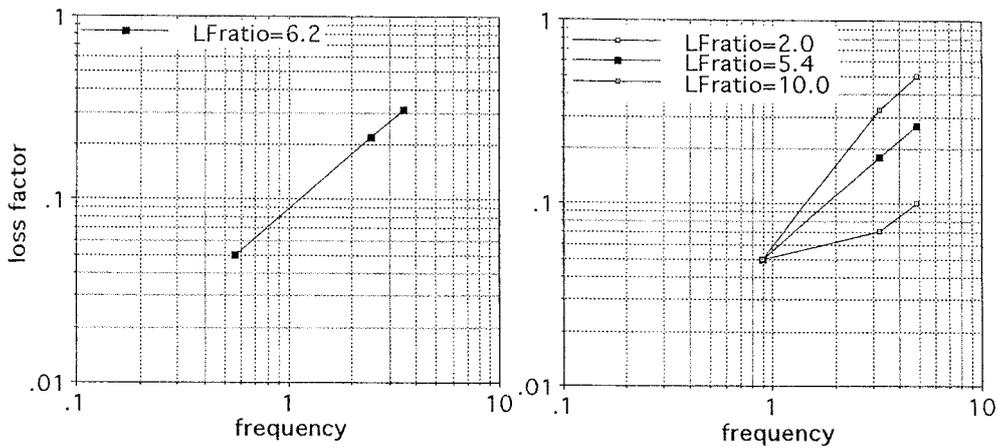


図-5 1次及び2次の共振での損失係数と、計算で求められる反共振の周波数と損失係数の関係 (左:片持梁, 右:両端自由梁)

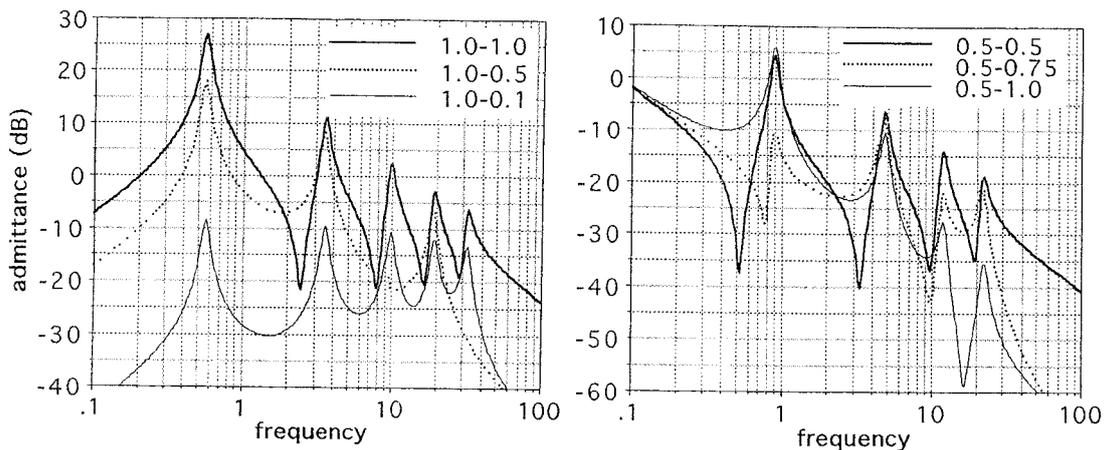


図-6 駆動点アドミタンスと伝達アドミタンス (左:片持梁, 右:両端自由梁)

8. 駆動点と応答点を変えたときの損失係数

損失係数測定の際に駆動点と応答点を変えて評価することもしばしば行われる。しかしながら、駆動点と応答点異なる伝達アドミタンス特性は、駆動点アドミタンス特性と大きな差がある。ここでは、応答点を変えてアドミタンス特性を計算し、それから得られる損失係数に差があるかどうかを検討する。

結果を図-6に示す。片持梁の場合は駆動点を先端(1.0)とし、応答点を0.1, 0.5及び1.0とした。相反性から、駆動点と応答点を入れ替えても伝達アドミタンス特性は変わらないので、駆動点を0.1, 0.5及び1.0とし、応答点を先端にした場合と同じ条件である。両端自由梁の場合は、駆動点を0.5とし、応答点を0.5(中央), 0.75及び1.0とした。なお、図-6において、例えば、 $a-b$ (a, b は数字)とある表記の a 及び b は、それぞれ梁の駆動点、及び応答点の座標を示している。

片持梁で五つのモードの損失係数を0.1とし、2次

共振での損失係数を求めると、1.0-0.1と1.0-1.0の両方の場合につき、期待される0.1に近い損失係数を与える。ところが、損失係数を0.3とすると、それぞれ0.32と0.30という値になり、駆動点と応答点異なると大きな損失係数を与える結果となっている。片持梁の支持部に近い位置で駆動し、先端で応答を測定して損失係数を求めるということも実際に行われることがあるが、駆動点アドミタンスと異なり、反共振の谷がなくなってそこが持ち上がった分だけ、半値幅法で求める損失係数が大きくなるという現象が起きて実際以上の大きな損失係数を与える可能性があることを示している。

9. ま と め

梁などの連続体の振動は、理論的に電気回路の素子であるインダクタンスとコンデンサの直列共振回路が無数に並列接続された回路で表現できる。損失は各共振系にモード減衰として直列に加えられると仮定すると、共振でのパラメータが分かれば反共振の周波数や

損失係数を知ることにも可能である。その場合の簡易な推定方法を示した。その結果から、二つの隣接する共振の損失係数が同じ値（周波数依存性がない場合）でも、反共振での損失係数はそれらと異なる値になることが分かった。また、駆動点と応答点を変えて測定すると損失係数が大きい場合は誤差の要因となることも知られた。

実際の材料の振動損失は温度や周波数に依存するため、上に述べた単純なモデルに基づく結論が実際の材料に対してどの程度まで適用できるかどうか、今後厳

密な実験で確認していく必要がある。ここで述べた結論は、損失を含めた振動のモデル化を行う際の基本的な考え方として役立つと思われる。

文 献

- 1) “制振鋼板の振動減衰特性試験方法,” JIS G 0602 (1993).
- 2) 早坂寿雄, 音響工学 (日刊工業新聞社, 東京, 1962).
- 3) 長松昭男, モード解析入門 (コロナ社, 東京, 1993).
- 4) 妹澤克惟, 振動学 (復刻版) (国際理工研究社, 東京, 1971).